1.1) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^+_*$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$v \oplus w := vw$, 1 es el vector 0

$\alpha \odot v := v^\alpha$ v^{-1} es el opuesto de v.

Tengo que verificar si la suma y el producto por escalar dada cumplen los axiomas para ser un espacio vectorial:

1) Conmutatividad:

$u + v = v + u$

Como en este caso $u \oplus v = uv$, entonces:

$uv = vu$, lo cual es cierto ya que son números reales positivos y tienen la propiedad conmutativa. ✓

2) Asociatividad:

$(u+v)+w = u+(v+w)$

En este caso nos queda:

$\underbrace{(uv)}_{\text{otro nro. real}} + w = u + \underbrace{(vw)}_{\text{otro nro. real}} \rightarrow (uv)w = u(vw)$

Nuevamente esta igualdad efectivamente se cumple ya que son todos números reales y tienen la propiedad conmutativa. ✓

3) Existencia del neutro:

$u + 0v = u$

En nuestro caso el neutro es el 1, entonces:

$u + 1 = u$

y como $u \oplus v = uv \rightarrow u.1 = u \rightarrow u = u$ ✓

④ Existencia del opuesto:

$u+(-u) = 0_V$,

Em este caso $0_V = 1$ y el opuesto es u^{-1}, entonces:

$u + u^{-1} = 1 \to$ Como $u \oplus v = uv \to \cancel{u} \cdot \frac{1}{\cancel{u}} = 1 \to 1 = 1$ ✓

⑤ Distributividad respecto de los escalares:

$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall \alpha,\beta \in K$, $\forall u \in V$

En este caso, $\alpha \odot u = u^{\alpha}$,

$(\alpha+\beta)u = u^{\alpha} + u^{\beta}$

→ Como $\alpha+\beta$ es otro escalar puedo aplicar también $\alpha \odot u = u^{\alpha}$

→ $u^{\alpha+\beta} = u^{\alpha} + u^{\beta}$ y por prop. de los escalares, el producto de dos reales iguales elevados a distintos potencias es igual a elevar ese real a la suma de los potencias.

→ $u^{\alpha+\beta} = u^{\alpha+\beta}$ ✓

⑥ Distributividad respecto de los vectores

$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

En este caso, como $u \oplus v = uv$, entonces:

$\alpha(uv) = \alpha u + \alpha v$

Como $\alpha \odot u = u^{\alpha}$, entonces:

$\alpha(uv) = u^{\alpha} + v^{\alpha}$

Como uv es otro nro. real puedo aplicar $\alpha \odot u = u^{\alpha}$

→ $(uv)^{\alpha} = u^{\alpha} + v^{\alpha}$

Como u^{α} y v^{α} son nuevos vectores de V puedo aplicar

$u \oplus v = uv$

→ $(uv)^{\alpha} = u^{\alpha} v^{\alpha}$, que por prop. de los reales es igual a $(uv)^{\alpha} = (uv)^{\alpha}$ ✓

7) **Asociatividad respecto de los escalares:**

$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad , \quad \forall \alpha,\beta \in K \, , \quad \forall u \in V$

Aplicando $\alpha \odot u = u^{\alpha}$, como βu es otro vector de V:

$\rightarrow (\beta u)^{\alpha} = u^{\alpha\beta} \rightarrow$ Aplico ~~[illegible]~~ $\alpha \odot u = u^{\alpha}$ a βu.

$\rightarrow (u^{\beta})^{\alpha} = u^{\alpha\beta}$, por prop. de los reales $\rightarrow (u^{\beta})^{\alpha} = u^{\beta\alpha}$,

$\rightarrow u^{\beta\alpha} = u^{\alpha\beta}$ ✓ (Por conmutatividad de los reales es igual)

8) $1.v = v \quad \forall v \in V$

~~[illegible]~~

Tomo el 1 como escalar y aplico $\alpha \odot v = v^{\alpha}$

$\rightarrow v^{1} = v \rightarrow v = v$ ✓

Efectivamente se cumplen los 8 axiomas y, por lo tanto, $(V, \oplus, \mathbb{K}, \odot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.